Feuille n° 6 : Calcul de Primitives

1 Intégration par parties

Exercice 1

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $x^2 e^{-x}$

2. $\arctan x$

3. $e^x \cos(x)$

4. $x^3 e^{-x^2}$

5. $\ln x$

6. $\ln^2 x$

7. $x^3 \operatorname{sh} x$

2 Changement de variable

Exercice 2

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\phi' f'(\phi)$

1. $\dfrac{1}{x^2+25}$

2. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

3. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

5. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

6. $\cos^3 x$

Exercice 3

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\dfrac{1}{\cos x}$

2. $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

3 Fractions rationnelles

Exercice 4

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes et en calculer une primitive :

1. $\dfrac{1}{X^3-X}$

2. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

3. $\dfrac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$

4. $\dfrac{X^4}{(X^2+X+1)^2}$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^3}{1-t}\, dt$

2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{t^2-t+1}\, dt$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1}\, dt$

4 Vrai ou Faux

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.

3. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.

4. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Si f est négative sur $\mathbb{R}$ alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6. Si f est paire alors F est impaire.

7. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

5 Divers

Exercice 7

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$$

2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\, dx.$$

Exercice 8

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Exercice 9

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Calculer la limite de la suite $u_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$.

Exercice 10

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que la suite (I_n) converge.

3. Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.

4. Montrer que le produit $(n \ +1)I_n I_{n+1}$ est constant.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$.

6. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.